AUTOMAATJUHTIMINE JA SÜSTEEMIANALÜÜS

Eduard Petlenkov, 2019

Süsteemide kompositsioon

- Süsteemide dekompositsioon juhitavuse ja jälgitavuse alusel
- Süsteemide kompositsioon

Eduard Petlenkov

eduard.petlenkov@taltech.ee, TalTech ICT-502B, tel. 6202104

TalTech Arvutisüsteemide instituut

Arukate süsteemide keskus

Süsteemide dekompositsioon juhitavuse ja jälgitavuse alusel

Vaatleme probleemi näite alusel.

Olgu antud süsteem kujul:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \ x(0) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kontrollime süsteemi juhitavust?

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{}_{B} \quad \underbrace{}_{AB} \quad \underbrace{}_{A^2B}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{dim } [x(t)] = 3 \\ Q_C \text{ astak} = 2 \end{array}\right\} \textbf{Süsteem ei ole täielikult juhitav}$$

Järgnevalt kontrollime süsteemi jälgitavust?

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{C^T} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{A^T C^T} & \underbrace{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{(A^T)^2 C^T} \end{bmatrix}$$

dim [x(t)] = 3

Q_C astak = 2 **Ei ole täielikult jälgitav**

Rakendame olekumudelile Laplace'i teisendust

$$\begin{cases} V(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) \\ X(s) = \frac{1}{s} V(s) + x(0), \end{cases}$$

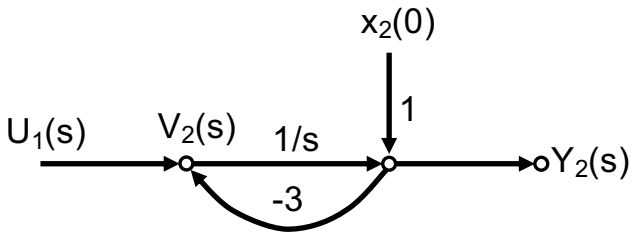
kus

$$V(s) = L[\dot{x}(t)]$$

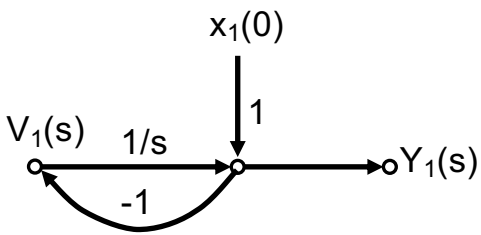
$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

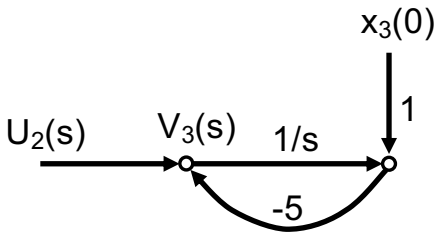
$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$



Esitame võrrandid graafiliselt.





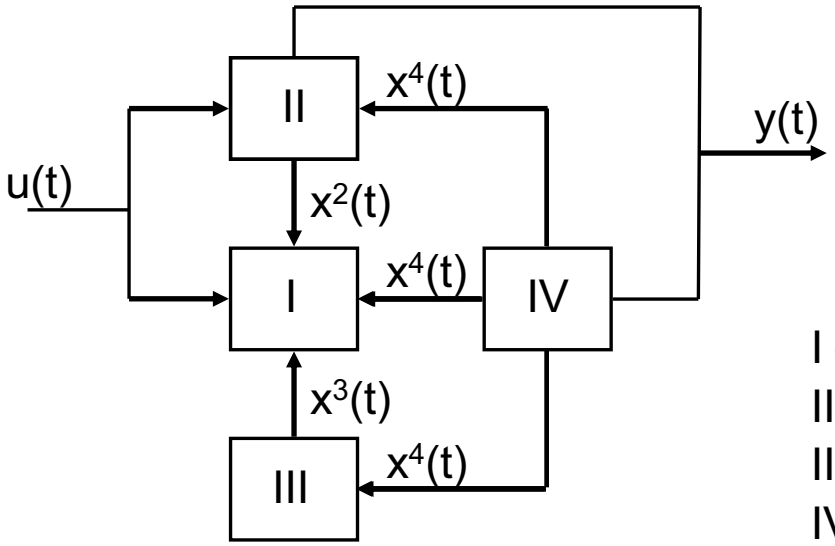
$x_1(t)$, $x_2(t)$ – jälgitavad olekud
$x_2(t)$, $x_3(t)$ – juhitavad olekud
$x_2(t)$ – juhitav ja jälgitav olek

Üldistus – Kalmani dekompositsioon [Rudolf Emil Kalman (sünd.1930)]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Olekuvektor on tükeldatud

$$x(t) = \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \\ x^4(t) \end{bmatrix}$$



I – juhitav, mittejälgitav
II – **juhitav, jälgitav**
III – mittejuhitav, mittejälgitav
IV – mittejuhitav, jälgitav

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \\ \dot{x}^3(t) \\ \dot{x}^4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \\ x^4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t);$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \\ x^4(t) \end{bmatrix}$$

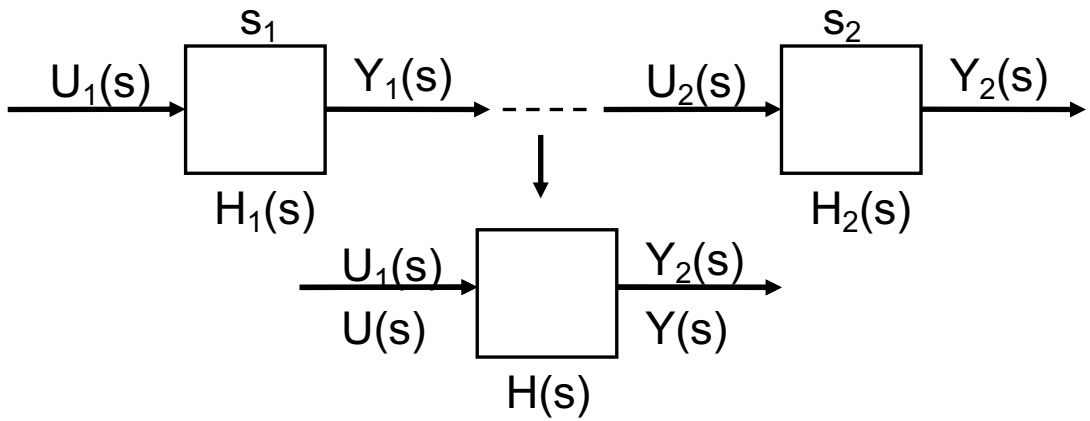
Olekumudel → Ülekandemudel

$$H_{uy}(s) = C_2(sE_2 - A_{22})^{-1} B_2$$

Ülekandemaatriks iseloomustab ainult süsteemi täielikult juhitavat ja jälgitavat osa (alamsüsteemi).

Ülekandefunktsioonide ühest rakendusest – süsteemide kompositsioon (1)

1) **Järjestikühendus**



$$Y_1(s) = H_1(s) \cdot U_1(s)$$

$$\leftarrow U_2(s) = Y_1(s)$$

$$Y_2(s) = H_2(s) \cdot U_2(s)$$

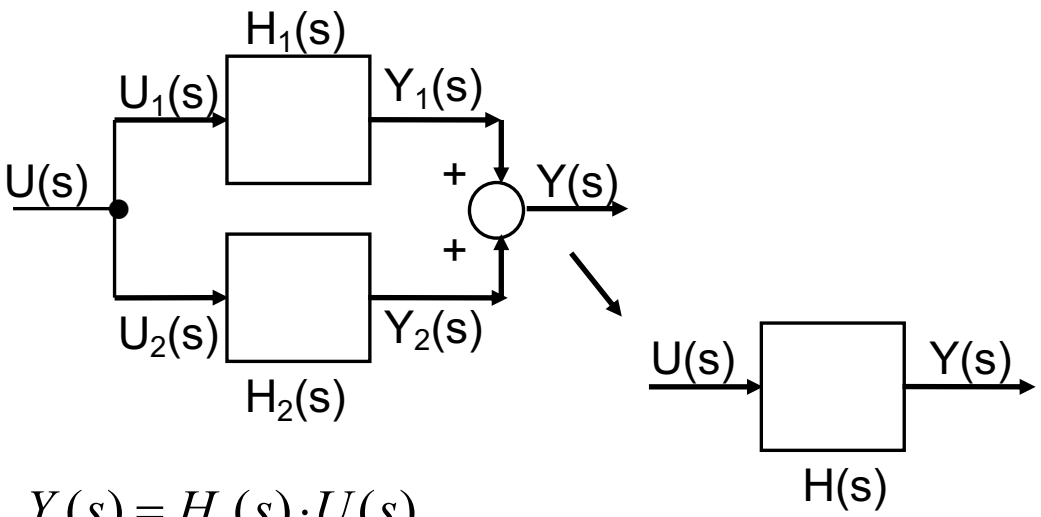
$$Y_2(s) = H_1(s) H_2(s) \cdot U_1(s)$$

$$H(s) = H_1(s) H_2(s)$$ 2 järjestikku

$$H(s) = H_1(s) \cdots H_n(s)$$ n järjestikku

$$Y(s) = H(s) U(s)$$

2) **Paralleelühendus**



$$Y_1(s) = H_1(s) \cdot U(s)$$

$$Y_2(s) = H_2(s) \cdot U(s)$$

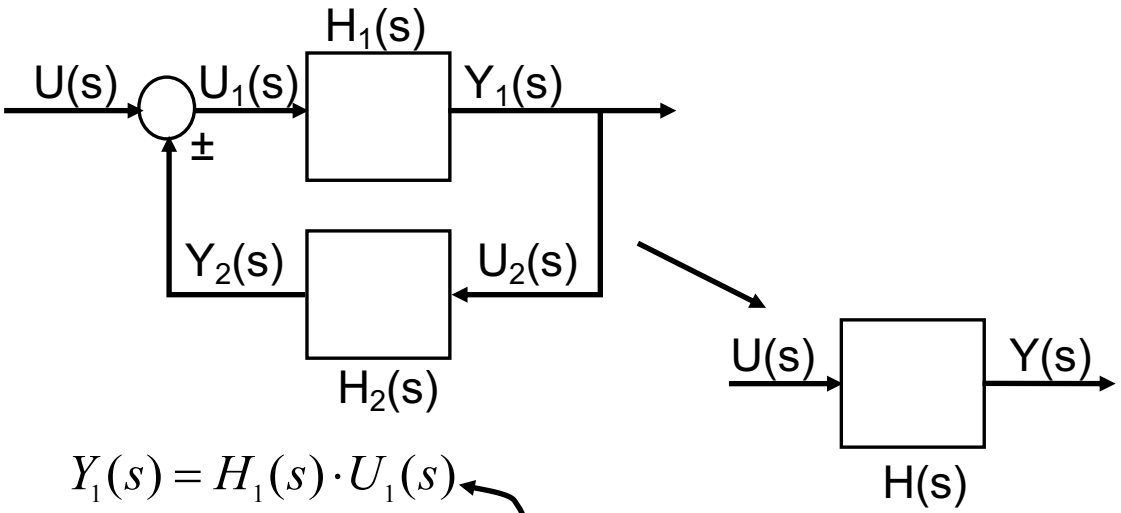
$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$$

$$Y(s) = [H_1(s) + H_2(s)]U(s)$$

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$ 2 paralleelselt

$$H(s) = H_1(s) + \cdots + H_n(s)$$ n paralleelselt

3) **Tagasisideühendus**



$$Y_1(s) = H_1(s) \cdot U_1(s)$$

$$Y_2(s) = H_2(s) \cdot U_2(s)$$

$$U_1(s) = U(s) \pm Y_2(s)$$

$$Y_1(s) = U_2(s)$$

$$Y_1(s) = H_1(s)\left[U(s) \pm Y_2(s)\right]$$

$$Y_1(s) = H_1(s)\left[U(s) \pm H_2(s)U_2(s)\right]$$

$$\left[1 \pm H_1(s)H_2(s)\right]Y_1(s) = H_1(s)U(s)$$

$$Y_1(s) = Y(s) = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}U(s)$$

Avaldises: märk "**+**" – **negatiivne** tagasiside (**skeemil** märk "-")
märk "**-** " – positiivne tagasiside (**skeemil** märk "+")

- Lihtsatest süsteemidest on võimalik moodustada (soovitud omadustega) keerukaid süsteeme.
- Lihtsatest süsteemidest on võimalik moodustuda mitmemõõtmelisi süsteeme (mitu sisendit või mitu väljundit).

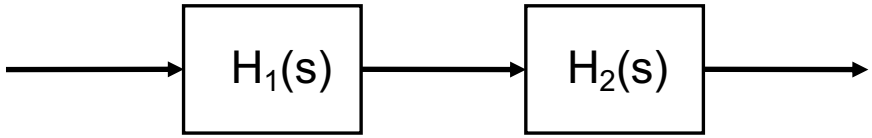
Kuidas muutuvad süsteemi omadused?

Olgu antud 2 süsteemi ülekandefunktsioonidega:

$$H_1(s) = \frac{1}{s+2} \quad \rightarrow \quad \text{poolus:}\{-2\}$$

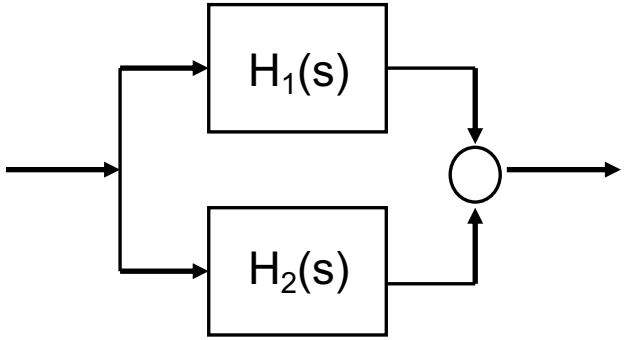
$$H_2(s) = \frac{1}{s-3} \quad \rightarrow \quad \text{poolus:}\{3\}$$

Järjestikühendus



$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s-3)} \rightarrow$$ **poolused: {-2,3}**

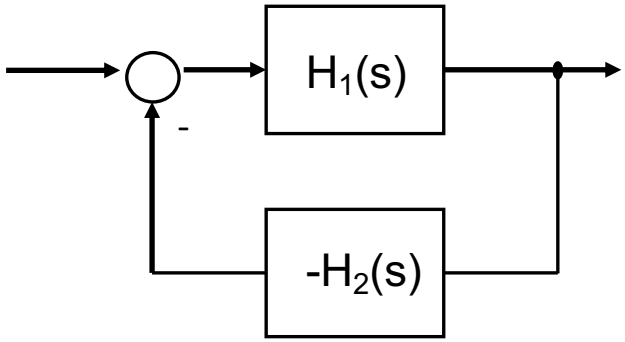
Paralleelühendus



$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) =$$

$$= \frac{1}{(s+2)} + \frac{1}{(s-3)} = \frac{2s-1}{(s+2)(s-3)} \rightarrow$$ **poolused: {-2,3}**

Tagasisideühendus (negatiivne tagasiside)



$$H_1(s) = \frac{1}{s-5}$$ poolus: {5}

$$H_2(s) = K$$

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = \frac{\frac{1}{s-5}}{1 + \frac{1}{s-5} \cdot K} = \frac{1}{s + (K-5)}$$

K=0 $\quad H(s) = \frac{1}{s-5}$

K=1 $\quad H(s) = \frac{1}{s-4}$

$\vdots$

$\vdots$

K=5 $\quad H(s) = \frac{1}{s}$

K=6 $\quad H(s) = \frac{1}{s+1}$

Järeldused:

1. Järjestik- ja paralleelühendused ei muuda süsteemi(de) pooluste paigutust

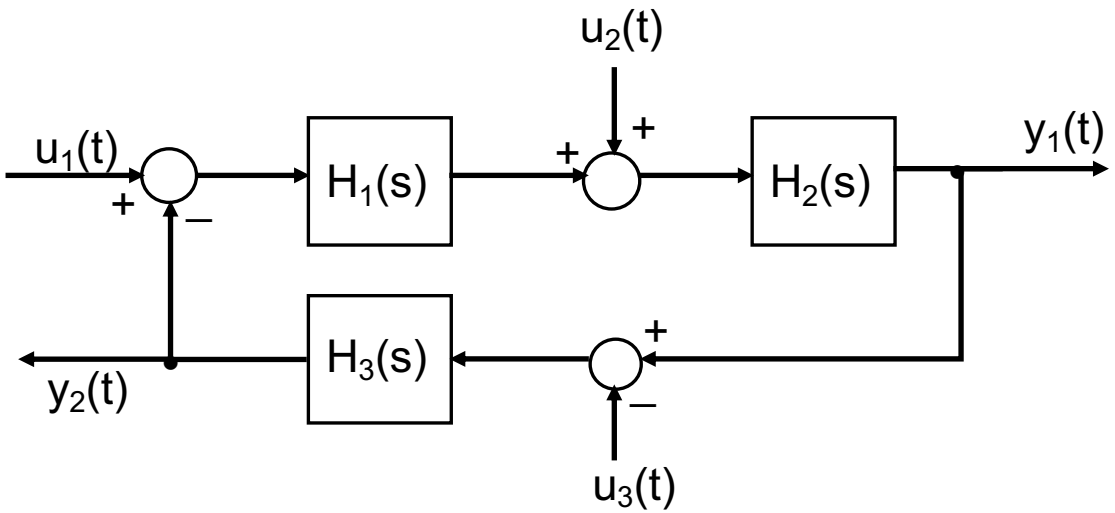
2. Tagasisideühendusega on võimalik muuta süsteemi pooluste paigutust st. luua soovitud omadustega süsteeme.

NB! Süsteemi poolused (pooluste paigutus) määrab ära süsteemi käitumise

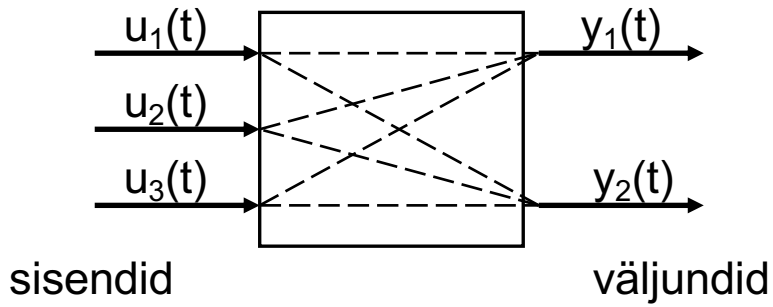
TAL TECH

Ülekandefunktsioonide ühest rakendusest – süsteemide kompositsioon (2)

Näide No.4 Mitmemõõtmeline süsteem - ülekandemaatriksid



$$H_1(s) = \frac{1}{s+2}; \quad H_2(s) = 10; \quad H_3(s) = \frac{s}{s+3}$$



6 ülesannet

Üritame matemaatiliselt kirjeldada moodustunud süsteemi

Ülekanne: $u_1(t) \rightarrow y_1(t)$

$$H_{u_1y_1}(s) = \frac{H_1(s)H_2(s)}{1+H_1(s)H_2(s)H_3(s)} = \frac{\frac{10}{s+2}}{1+\frac{10}{s+2}\cdot\frac{s}{s+3}} = \frac{10(s+3)}{s^2+15s+6}$$

Ülekanne: $u_1(t) \rightarrow y_2(t)$

$$H_{u_1y_2}(s) = \frac{H_1(s)H_2(s)H_3(s)}{1+H_1(s)H_2(s)H_3(s)} = \frac{\frac{1}{s+2}\cdot 10\cdot\frac{s}{s+3}}{1+\frac{1}{s+2}\cdot 10\cdot\frac{s}{s+3}} = \frac{10s}{s^2+15s+6}$$

Ülekanne: $u_2(t) \rightarrow y_1(t)$

$$H_{u_2y_1}(s) = \frac{H_2(s)}{1+H_1(s)H_2(s)H_3(s)} = \frac{10}{1+\frac{1}{s+2}\cdot 10\cdot\frac{s}{s+3}} = \frac{10(s+2)(s+3)}{s^2+15s+6}$$

Ülekanne: $u_2(t) \rightarrow y_2(t)$

$$H_{u_2y_2}(s) = \frac{H_2(s)H_3(s)}{1+H_1(s)H_2(s)H_3(s)} = \frac{10\cdot\frac{s}{s+3}}{1+\frac{1}{s+2}\cdot 10\cdot\frac{s}{s+3}} = \frac{10s(s+2)}{s^2+15s+6}$$

Ülekanne: $u_3(t) \rightarrow y_1(t)$

$$H_{u_3y_1}(s) = \frac{-H_1(s)H_2(s)H_3(s)}{1+H_1(s)H_2(s)H_3(s)} = \frac{-\frac{1}{s+2}\cdot 10\cdot\frac{s}{s+3}}{1+\frac{1}{s+2}\cdot 10\cdot\frac{s}{s+3}} = \frac{-10s}{s^2+15s+6}$$

Ülekanne: $u_3(t) \rightarrow y_2(t)$

$$H_{u_3y_2}(s) = \frac{-H_3(s)}{1+H_1(s)H_2(s)H_3(s)} = \frac{-\dfrac{s}{s+3}}{1+\dfrac{1}{s+2}\cdot 10\cdot\dfrac{s}{s+3}} = \frac{-s(s+2)}{s^2+15s+6}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{u_1y_1} & H_{u_2y_1} & H_{u_3y_1} \\ H_{u_1y_2} & H_{u_2y_2} & H_{u_3y_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix}$$

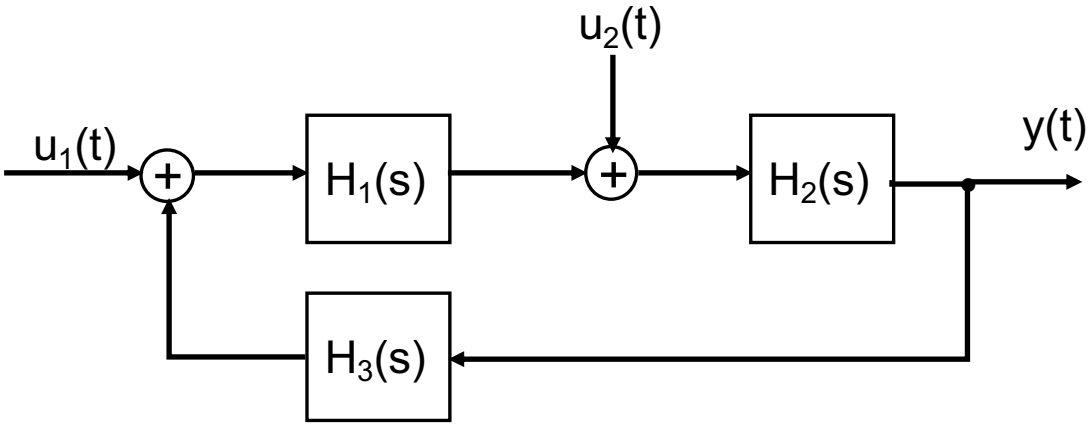
$$\underbrace{\mathcal{Y}(s)}_{2\times 1} = \underbrace{\mathcal{H}(s)}_{2\times 3} \cdot \underbrace{\mathcal{U}(s)}_{3\times 1}$$

$\mathcal{H}$(s) – **ülekandemaatriks** (koosneb ülekandefunktsioonidest)

Analoogiliselt:

- **hüppekajade maatriks**;
- **impulsskajade maatriks**.

Näide No.5 Mitmemõõtmelise süsteemi analüüs



$$H_1(s) = \frac{3}{s+3}; \quad H_2(s) = \frac{1}{s+1}; \quad H_3(s) = 1;$$

$$u_1(t) = 3e^{-t}; \quad u_2(t) = 4 \cdot \mathbf{1}(t)$$

Leida $y(t),\ y(0),\ y(\infty)?$

Lahendus:

$$Y(s) = Hu_1y(s) \cdot U_1(s) + Hu_2y(s) \cdot U_2(s)$$

$$Hu_1y(s) = \frac{H_1(s)H_2(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)H_3(s)} = \frac{3}{s^2 + 4s}$$

$$Hu_2y(s) = \frac{H_2(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)H_3(s)} = \frac{s+3}{s^2 + 4s}$$

$$Y(s) = \frac{3}{s^2 + 4s} \cdot \underbrace{\frac{3}{s+1}}_{L[3e^{-t}]} + \frac{s+3}{s^2 + 4s} \cdot \underbrace{\frac{4}{s}}_{L[4\mathbf{1}(t)]} = \frac{4s^2 + 25s + 12}{s^2(s+1)(s+4)}$$

Lahutame osamurdudeks

$$Y(s) = \frac{4s^2 + 25s + 12}{s^2(s+1)(s+4)} = \frac{\overset{5/2}{K_1}}{s} + \frac{\overset{3}{K_2}}{s^2} + \frac{\overset{3}{K_3}}{s+1} + \frac{\overset{1/2}{K_4}}{s+4}$$

$$4s^2 + 25s + 12 = K_1 s(s+1)(s+4) + K_2(s+1)(s+4) +$$
$$+ K_3 s^2(s+4) + K_4 s^2(s+1)$$

$$y(t) = \frac{5}{2}\mathbf{1}(t) + 3t - 3e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-4t}; \quad y(0) = \frac{5}{2} - 3 + \frac{1}{2} = 0; \quad y(\infty) = \infty$$