AUTOMAATJUHTIMINE JA SÜSTEEMIANALÜÜS

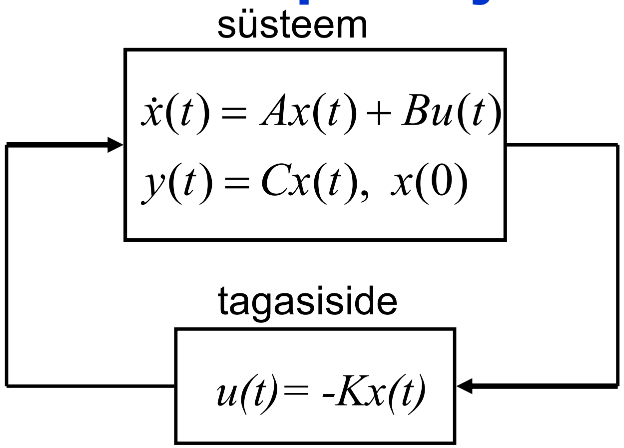
Eduard Petlenkov, 2019

Juhitavuse ja jälgitavuse rakendused

Eduard Petlenkov
eduard.petlenkov@taltech.ee, TalTech ICT-502B, tel. 6202104
TalTech Arvutisüsteemide instituut
Arukate süsteemide keskus

TAL
TECH

Juhtimissüsteem pidevaja süsteemi näitel



Olgu süsteem (A,B) täielikult juhitav.

Mida juhtimissüsteem peab tegema?

$$x(0) \neq 0 \rightarrow \underset{t \to \infty}{x(t)} = 0$$

Sisuliselt on tegemist stabiliseerimissüsteemiga, mis hoiab süsteemi olekus $x_1(\,) = x_2(\,) = \cdots = x_n(\,) = 0.$

TAL TECH

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$u(t) = -Kx(t)$$

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t),\ x(0)$$

on tagasisidestatud süsteemi vabaliikumise võrrand.

Vabaliikumise võrrandi karakteristlik polünoom

$$\det\left[sE - A + BK\right] = \varphi(s), \qquad *$$

kus $\varphi(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i).$

1) tagasisidestatud süsteemi (soovitavad) omadused on antud $\varphi(s)$ kujul;

2) võrrandist $*$ leitakse tagasisidemaatriks K.

Juhtimissüsteem diskreetaja süsteemi näitel

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$ ↔ on täielikult juhitav

$$y(k) = Cx(k),\ \ x(0)$$

$$u(k) = -Kx(k)$$ ↔ on tagasiside

$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma K)x(k),\ \ x(0)$$ ↔ on tagasisidestatud süsteemi vabaliikumise võrrand

Vabaliikumise võrrandi karakteristlik polünoom

$$\det\left[zE - \Phi + \Gamma K\right] = \varphi(z)$$

?

↗ antud

↙? arvutatakse

Näide No.4 Pidevaja juhtimissüsteem: süntees, analüüs

Antud: 1) $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \ x(0) \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2) $u(t) = -Kx(t)$

3) tagasisidestatud süsteemi karakteristlik polünoom

$$\varphi(s) = s^2 + 10s + 25$$

Leida: 1) K

2) Tagasisidestatud süsteemi analüüs:

$$X(s),\ x(\infty) \quad ?$$

TAL TECH

Lahendus:

1) Juhitavuse kontroll

$$Q_C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \dim[x(t)] &= 2 \\ rank\ Q_C &= 2 \end{aligned}\right\}$$ täielikult juhitav

2) Süntees – tagasisidemaatriksi K arvutus

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$$

$$\det[sE - A + BK] = \varphi(s)$$

$$\det\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [k_1 \quad k_2]\right\} = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ -4 + k_1 & s + k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= s^2 + k_2 s + (k_1 - 4) = s^2 + 10s + 25$$

$$k_2 = 10,\ k_1 = 29 \rightarrow K = [29 \quad 10]$$

3) Analüüs

$$\underset{\downarrow L}{\dot{x}(t)} = (A - BK)x(t),\ x(0)$$

$$sX(s) - x(0) = (A - BK)X(s)$$

$$X(s) = \left[sE - A + BK\right]^{-1} x(0)$$

$$sE - A + BK = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 25 & s+10 \end{bmatrix}$$

$$\left[sE - A + BK\right]^{-1} = \frac{1}{s^2 + 10s + 25}\begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 25}\begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{x(0)} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+12}{s^2 + 10s + 25} \\ \dfrac{2s-25}{s^2 + 10s + 25} \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \lim_{s \to 0} sX(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

m.o.t.t.

TAL TECH

Näide No.5 Diskreetaja juhtimissüsteem: süntees, analüüs

Antud: 1) $\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Cx(k), \; x(0) \end{cases}$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) $u(k) = -Kx(k)$

3) tagasisidestatud süsteemi karakteristlik polünoom

$\varphi(z) = z^2$ (finiitne süsteem) !

Leida: 1) K;

2) Analüüs $x(1), x(2), \cdots, x(\infty)$.

Lahendus:

1) Juhitavuse kontroll

2) Süntees - K arvutus

$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma K)x(k)$$

$$\det\left[zE - \Phi + \Gamma K\right] = \varphi(z)$$

$$\det\left\{\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right\} = \det\begin{bmatrix} z & -1 \\ 1+k_1 & z-2.5+k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= z^2 + (k_2 - 2.5)z + (k_1 + 1) = z^2$$

$$k_1 = -1,\ k_2 = 2.5 \rightarrow K = \begin{bmatrix} -1 & 2.5 \end{bmatrix}$$

3) Analüüs

$$x(k+1) = \left[\Phi - \Gamma K\right] x(k),\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi - \Gamma K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

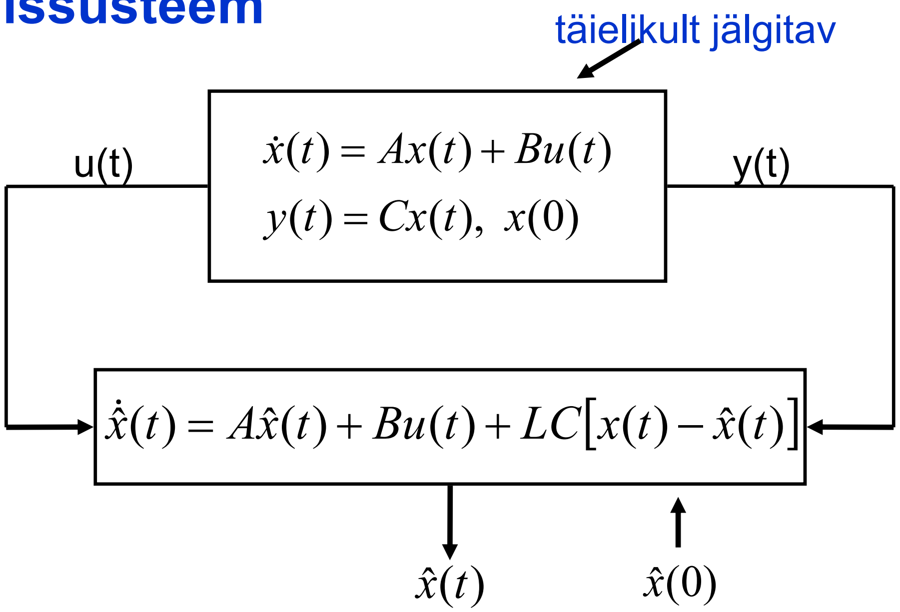
$$k = 1 \quad x(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k = 2 \quad x(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k = 3 \quad x(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots \quad k = \infty \quad x(\infty) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

TAL TECH

Jälgimissüsteem



$$
\begin{array}{rl}
 & \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\
- & \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + LC\left[x(t) - \hat{x}(t)\right] \\
\hline
 & \dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t), \quad \text{kus} \\
 & \tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)
\end{array}
$$

Võrrand $\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t)$ on tagasisidestatud süsteemi vabaliikumise võrrand.

NB!

$$y(t) = Cx(t),\ \ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

$$LC\left[x(t) - \hat{x}(t)\right] = L\left[y(t) - \hat{y}(t)\right]$$

Vabaliikumise võrrandi karakteristlik polünoom

$$\det\left[sE - A + LC\right] = \varphi(s)$$

?

antud karakteristlik polünoom
(soovitud omadused)

Sisuliselt on L tagasisidemaatriks.

Jälgimissüsteem diskreetaja süsteemi näitel

Süsteem:
$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Cx(k), \;\; x(0) \end{cases}$$

Olekutaastaja (olekuhindaja):

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + LC\left[x(k) - \hat{x}(k)\right], \\ \hat{x}(0) \cdot \end{cases}$$

Tagasisidestatud süsteemi vabaliikumise võrrand

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = (\Phi - LC)\tilde{x}(k), \; kus \\ \tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k) \end{cases}$$

$$\det\left[zE - \Phi + LC\right] = \varphi(z)$$

?

- antud

Näide No.6 Pidevaja jälgimissüsteem: süntees, analüüs

Antud: 1) $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t),\ x(0) \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2) $\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + LC[x(t) - \hat{x}(t)], \\ \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

3) Tadasisidestatud süsteemi karakteristlik polünoom (soovitud omadused)

$$\varphi(s) = s^2 + 10s + 25.$$

Leida: 1) L

2) analüüsida süsteemi

$\tilde{x}(\infty)$?

Lahendus:

1. Jälgitavuse kontroll

   Veenduge, et antud süsteem on täielikult jälgitav!?

2. Süntees- tagasisidemaatriksi L arvutus

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t)$$

$$\det\left[sE - A + LC\right] = \varphi(s)$$

?

$$\det\left[sE - A + LC\right] = \det\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} s & -4 + l_1 \\ -1 & s + l_2 \end{bmatrix} = s^2 + l_2 s + (l_1 - 4) = s^2 + 10s + 25$$

$$l_2 = 10, \quad l_1 = 29 \rightarrow L = \begin{bmatrix} 29 \\ 10 \end{bmatrix}$$

vt. Näide No.4 ja võrdle

$K = L^T$!?

Kontroll:

$$\det\begin{bmatrix} s & -4+l_1 \\ -1 & s+l_2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} s & 25 \\ -1 & s+10 \end{bmatrix} = s^2+10s+25$$

3. Analüüs

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A-LC)\tilde{x}(t)$$

$$s\tilde{X}(s) - \tilde{x}(0) = (A-LC)\tilde{X}(s)$$

$$\tilde{X}(s) = (sE-A+LC)^{-1}\tilde{x}(0)$$

$$(sE-A+LC)^{-1} = \frac{1}{s^2+10s+25}\begin{bmatrix} s+10 & -25 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}(s) = \frac{1}{s^2+10s+25}\begin{bmatrix} s+10 & -25 \\ 1 & s \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(0)}$$

$$\tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{X}(s)=\frac{1}{s^2+10s+25}\begin{bmatrix} s & -10 \\ s & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{s-10}{s^2+10s+25} \\ \dfrac{s+1}{s^2+10s+25} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \widetilde{X}_1(s) \\ \widetilde{X}_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{X}_1(s)=\frac{s-10}{s^2+10s+25}=\frac{s-10}{(s+5)^2}=$$

$$=\frac{K_1}{s+5}+\frac{K_2}{(s+5)^2}=\frac{1}{s+5}+\frac{-15}{(s+5)^2}\xrightarrow{L^{-1}}\widetilde{x}_1(t)=e^{-5t}-15te^{-5t}$$

$$\widetilde{x}_1(0)=1,\quad \widetilde{x}_1(\infty)=0$$

$$\widetilde{X}_2(s)=\frac{s+1}{s^2+10s+25}=\frac{s-1}{(s+5)^2}=$$

$$=\frac{1}{s+5}+\frac{-4}{(s+5)^2}=\frac{1}{s+5}+\frac{-15}{(s+5)^2}\xrightarrow{L^{-1}}\widetilde{x}_2(t)=e^{-5t}-4te^{-5t}$$

$$\widetilde{x}_2(0)=1,\quad \widetilde{x}_2(\infty)=0.$$

Kontrolliks kasutame veel piirväärtusteoreeme.

$$\widetilde{x}_1(0) = \lim_{s\to\infty} s\widetilde{X}_1(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(s-10)}{s^2+10s+25} = 1$$

$$\widetilde{x}_1(\infty) = \lim_{s\to 0} s\widetilde{X}_1(s) = 0$$

$$\widetilde{x}_2(0) = \lim_{s\to\infty} s\widetilde{X}_2(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(s+1)}{s^2+10s+25} = 1$$

$$\widetilde{x}_2(\infty) = \lim_{s\to 0} s\widetilde{X}_2(s) = 0$$

m.o.t.t.

Näide No.7 Diskreetaja jälgimissüsteem: süntees, analüüs

Antud: 1) $\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Cx(k),\ x(0) \end{cases}$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix},\ \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) $\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + LC\left[x(k) - \hat{x}(k)\right] \\ \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$

3) Karateristlik polünoom $\varphi(z) = z^2$.

Leida: 1) L

2) Analüüsida tagasisidestatud süsteemi $\tilde{x}(\infty)$?

TAL TECH

Lahendus:

1. Jälgitavuse kontroll

   Veenduge, et antud süsteem on täielikult jälgitav.

2. Tagasisidemaatriksi L arvutus

$$\tilde{x}(k+1) = (\Phi - LC)\tilde{x}(k), \quad \text{kus}$$

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

$$\det\left[zE - \Phi + LC\right] = \varphi(z)$$

$$\det\left[zE - \Phi + LC\right] = \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} z & 1 + l_1 \\ -1 & z - 2.5 + l_2 \end{bmatrix} = z^2 + (l_2 - 2.5)z + (l_1 + 1) = z^2$$

$$l_2 = 2.5, \; l_1 = -1 \rightarrow L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

TAL TECH

Kontroll:

$$\det\begin{bmatrix} z & 1+l_1 \\ -1 & z-2.5+l_2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} z & 0 \\ -1 & z \end{bmatrix} = z^2$$

3. Analüüs

$$\tilde{x}(k+1) = (\Phi - LC)\tilde{x}(k), \quad k = 0,1,2,\cdots$$

$$\Phi - LC = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

k=0 $$\tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

k=1 $$\tilde{x}(1) = (\Phi - LC)\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}(2) = (\Phi - LC)\tilde{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\tilde{x}(\infty) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

TAL TECH